

ANÁLISE DINÂMICA ESTACIONÁRIA DE MEMBRANA ATRAVÉS DA FORMULAÇÃO DIRETA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO. Hugo Custódio da Silva, Luiz Carlos Facundo Sanches. – Engenharia Mecânica – Departamento de Matemática – Faculdade de Engenharia – Campus de Ilha Solteira

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) tem sido aplicado na resolução dos mais variados problemas de engenharia com grande eficiência e precisão. Parte do estudo do comportamento dinâmico de estruturas pelo MEC é objeto de pesquisa recente. Elementos estruturais de membrana são comumente encontrados em projetos civis e projetos da engenharia aeronáutica e mecânica. Neste trabalho, a versão direta do MEC é aplicada na análise da resposta dinâmica estacionária de estruturas de membrana. A chamada solução fundamental dinâmica da elasticidade bidimensional (estado plano de tensão e/ou deformação) é usada para transformar as equações diferenciais governantes em Equações Integrais de Contorno (EIC) através do MEC. Na aplicação do método, as EIC são discretizadas utilizando elementos isoparamétricos lineares contínuos e descontínuos. Duas EIC em termos de deslocamento e esforços de superfície são aplicadas a cada nó de contorno, uma para cada direção do espaço bidimensional. O ponto de colocação onde são calculadas as EIC foi posicionado fora do domínio do problema, levando a uma formulação não singular. Um sistema global de equações algébricas pode ser construído a partir da imposição das condições de contorno de cada caso individual. Com a determinação dos valores de contorno, variáveis de domínio são encontradas facilmente através de um procedimento padrão de integração. Uma força harmônica de amplitude constante em um ponto qualquer faz a excitação da estrutura. Os deslocamentos resultantes são calculados neste mesmo ponto ou em outro local. Funções de Resposta em Frequências (FRF) são construídas a partir dos deslocamentos dos nós de contorno de cada estrutura. As respostas em deslocamentos para uma dada faixa de frequências constituem a FRF. As frequências operacionais são obtidas das ressonâncias presentes na FRF. Os modos operacionais são determinados calculando-se o campo de deslocamentos, para cada frequência operacional encontrada. A presente formulação é aplicada na análise dinâmica estacionária de alguns modelos de membrana. O procedimento mostrou-se bastante preciso na obtenção das frequências naturais e modos próprios dessas estruturas. A metodologia é validada por meio de resultados analíticos e através de comparações com resultados numéricos obtidos por softwares comerciais.

Introdução

A análise do comportamento dinâmico de estruturas pelo MEC é objeto de pesquisa recente (Tanaka *et al.*, 1998). É comum na resolução do problema dinâmico o uso da chamada solução fundamental estática, resultando em formulações integrais que apresentam integrais de contorno, mas também integrais de domínio. Isto significa que além de discretizar o contorno é preciso também resolver o problema de domínio. Neste caso, uma eficiente solução para resolver o domínio foi descrita por Beskos (1987) através de um procedimento específico. Uma solução fundamental alternativa para o estudo da vibração de peças esbeltas submetidas à flexão também faz parte de um hall de aplicações atuais. De acordo com Beskos (1997), na implementação pelo MEC das equações governantes do problema pode ser aplicada a chamada solução fundamental dinâmica. Isto resulta em uma formulação integral que requer somente a discretização do contorno do modelo que está sendo analisado. Uma aplicação desta metodologia no problema de vibração livre de placas finas, usando elementos de contorno lineares, foi realizada por Sanches *et al.* (2002). A formulação integral apresentada aqui foi feita por Sanches *et al.* (2004) e segue a mesma linha de pesquisa citada. Parte deste estudo analisou equações integrais do modelo dinâmico estacionário de membrana. Elementos de contorno lineares contínuos e/ou descontínuos foram usados na discretização do modelo pelo MEC, com seus nós geométricos colocados nas extremidades. Cada nó de contorno apresenta duas incógnitas e, conseqüentemente, são necessárias duas equações integrais para cada nó. Com a imposição das condições de contorno, obtém-se um sistema global de equações algébricas. No tratamento desse sistema de equações, optou-se por adotar uma formulação não-singular. Dados modais, isto é, frequências naturais e modos próprios de vibração, são obtidos a partir de informações contidas nas Funções de Resposta em Frequência (FRF). Uma força harmônica de amplitude constante excita um ponto da peça e o deslocamento resultante é calculado no mesmo ponto ou em outro local. As respostas em deslocamentos para uma dada faixa de frequências constituem a FRF. As frequências

operacionais da estrutura são obtidas das ressonâncias presentes na FRF. Os modos operacionais são determinados calculando-se o campo de deslocamentos, para cada frequência operacional encontrada. A presente formulação é aplicada na análise dinâmica estacionária de barras e vigas submetidas à tração/compressão e/ou flexão. O procedimento mostrou-se bastante preciso na obtenção das frequências naturais e modos próprios dessas estruturas individuais.

Formulação Integral de Contorno

De acordo com Domingues (1993), a integral de contorno para a teoria de membrana, é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} K_{\alpha\beta} u_{\beta}(P) &= \int_{\Gamma} U_{\alpha\beta}^*(P, Q) t_{\beta}(Q) d\Gamma(Q) \\ &- \int_{\Gamma} T_{\alpha\beta}^*(P, Q) u_{\beta}(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} U_{\alpha\beta}^*(P, Q) F_{\beta}(Q) d\Omega(Q) \end{aligned} \quad (1)$$

onde $K_{\alpha\beta}$ é o delta de *Kronecker* para um contorno suave, $d\Gamma$ e $d\Omega$ são diferenciais de contorno e domínio, respectivamente; $u_{\beta}(Q)$ e $t_{\beta}(Q)$ são valores de deslocamentos e esforços de superfície associados com o ponto de contorno Q , respectivamente; $U_{\alpha\beta}^*$ é o deslocamento em Q na direção β devido a uma força harmônica unitária aplicada no ponto P , na direção α ; $T_{\alpha\beta}^*$ é o esforço de superfície em Q na direção β devido a uma força harmônica unitária aplicada no ponto P , na direção α . O símbolo “*” corresponde a valores fundamentais. Considerando-se que todas as variáveis são submetidas a um deslocamento harmônico no tempo, $u(t) = \hat{u} \exp(i \omega t)$, com frequência circular ω , a solução fundamental do problema em termos de deslocamentos são dadas por (Domingues, 1993)

$$U_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{2\pi\rho c_2^2} [\psi \delta_{\alpha\beta} - \chi r_{,\alpha} r_{,\beta}] \quad (2)$$

onde

$$\psi = K_0(k_2 r) + \frac{1}{k_2 r} \left[K_1(k_2 r) - \frac{c_2}{c_1} K_1(k_1 r) \right] \quad (3)$$

$$\chi = K_2(k_2 r) - \frac{c_2^2}{c_1^2} K_2(k_1 r) \quad (4)$$

onde neste caso K_0 e K_1 são as funções modificadas de *Bessel* de ordem zero e segundo tipo, r é a distância entre o ponto de carregamento e deslocamento, $k_1 = i(\omega / c_1)$ e $k_2 = i(\omega / c_2)$, $i = \sqrt{-1}$, ω é a frequência circular, $c_1 = (\lambda + 2\mu/\rho)^{1/2}$, $c_2 = (\mu/\rho)^{1/2}$ e λ e μ as constantes de *Lamé*.

Formulação Algébrica e Metodologia de Implementação

Na implementação formulação de contorno, o ponto de colocação P é posicionado fora do domínio. Assim, a integração do termo livre desaparece e $K = 0$. Além disto, o contorno foi discretizado por elementos lineares e por funções de forma lineares. Considerando B_1 e B_2 a coordenada inicial e final do elemento, a sua geometria pode ser expressa em termos de coordenadas intrínsecas, ς :

$$b(\varsigma) = B_1 \frac{1-\varsigma}{2} + B_2 \frac{1+\varsigma}{2} \quad (5)$$

A mesma interpolação é usada para as variáveis dos elementos fora do canto. Neste caso, o nó foi deslocado no interior do elemento a um quarto do seu comprimento, $L_e/4$. Duas equações integrais foram escritas para cada nó de contorno. O ponto de colocação foi posicionado fora do domínio do elemento plano, a uma distância $d_1 = L_e/4$ do contorno, levando às equações integrais não singulares. Os coeficientes das matrizes H e G foram determinados integrando o produto dos “kernels” da solução fundamental, funções de forma e jacobianos sobre os elementos. As integrações não-singulares foram feitas por meio de uma quadratura Gaussiana padrão. Este procedimento leva a um sistema linear de equações algébricas:

$$[H]\{U\} = [G]\{T\} \quad (6)$$

onde U e T contêm os vetores deslocamentos e força de superfície no contorno, respectivamente. O sistema algébrico final $[A]\{X\} = \{B\}$ é obtido com a prescrição das condições de contorno do problema. A solução (vetor X) contém todas as quantidades desconhecidas no contorno. O sistema matricial $[A(\omega)]$ contém os termos de frequência circular.

Resultados

Esta seção apresenta um exemplo numérico para ilustrar a aplicação da formulação integral de contorno apresentada.

Exemplo 1: Barra engastada-engastada submetida a uma vibração axial uniforme

Uma barra retangular foi submetida a um esforço de superfície t , periódico e harmônico, na direção longitudinal. De acordo com a Figura 1, as condições de contorno são: dois lados opostos engastados na direção transversal e os outros dois livres. O coeficiente de Poisson ν e o fator de amortecimento β foram considerados nulos. Para o Módulo de Young foi adotado $E = 2.6 \text{ N/m}^2$ e para a densidade, $\rho = 1.0 \text{ kg/m}^3$. O número de pontos de Gauss foi igual a 12. A Tabela 1 mostra as duas discretizações utilizadas pelo MEC para a resolução do problema.

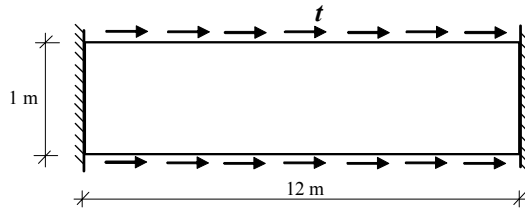


Figura 1 – Barra engastada-engastada sob esforço de superfície uniforme.

Tabela 1 – Discretizações da barra engastada-engastada.

Discretização	L_A	L_B	L_C	L_D
24 elementos (Malha 1)	2	10	2	10
48 elementos (Malha 2)	4	20	4	20

A Figura 2 mostra a segunda discretização do contorno com 48 elementos lineares, sendo utilizados nos cantos da barra nós duplos, perfazendo um total de 52 nós de contorno.

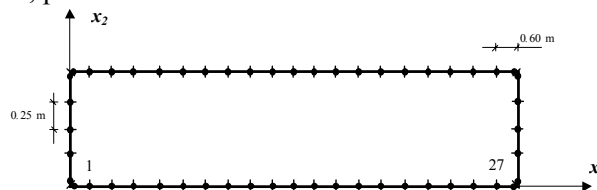


Figura 2 – Discretização via MEC para a barra engastada-engastada.

Os resultados em frequência obtidos deste problema de membrana, foram comparados com a solução analítica descrita por Richart (1970), e apresenta as seguintes frequências de ressonância:

$$\omega_n = \frac{n\pi}{\ell} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (7)$$

Para os valores adotados, a solução analítica apresentada conduz as três primeiras frequências de ressonância. Conhecidas as três primeiras frequências naturais do sistema, faz-se uma varredura ao longo de uma faixa próxima de frequências para construir a Função de Resposta em Frequência (FRF). Neste caso, são apresentadas na Figura 3 a FRF das três primeiras frequências naturais da barra engastada-engastada para as duas discretizações apresentadas.

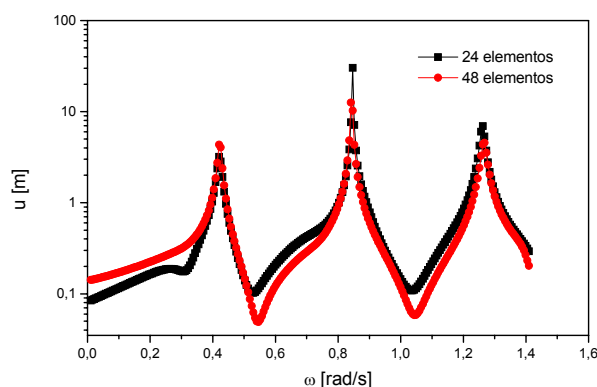


Figura 3 – FRFs das primeiras freqüências naturais de uma barra engastada-engastada.

Os picos obtidos na Figura 3 correspondem às três primeiras freqüências naturais do sistema e foram comparados com a solução analítica (Tabela 2).

Tabela 2 – Freqüências naturais de uma barra engastada-engastada.

Método	Freqüências [rad/s]		
	ω_1	ω_2	ω_3
MEC - 24 elementos	0,4202	0,8413	1,2678
MEC - 48 elementos	0,4202	0,8413	1,2678
Analítico	0,4221	0,8442	1,2664

Como ultima análise, são apresentados na Figura 4 os três primeiros modos de vibração da barra no sentido longitudinal.

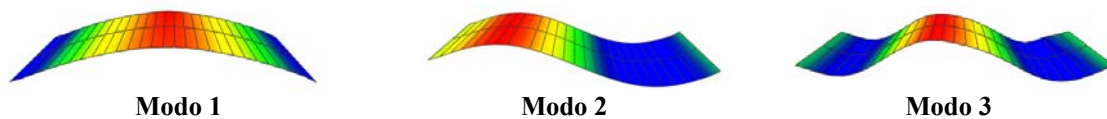


Figura 4 – Três primeiros modos de vibração de uma barra engastada-engastada.

Conclusões

Com o intuito de analisar o comportamento dinâmico estacionário de peças submetidas a excitações de tração harmônicas no tempo, um procedimento utilizando a Teoria de Membrana através do MEC, foi apresentado. O esquema proposto é usado principalmente para obter os dados modais do modelo, isto é, freqüências naturais e modos próprios de vibração. Os resultados encontrados apresentaram excelente convergência se comparados com as soluções analíticas. Este método pode ser visto como um eficiente procedimento para analisar vibrações livres e forçadas de membranas, onde somente o contorno do modelo necessita ser discretizado.

Referências Bibliográficas

- Beskos, D.E.: "Boundary Element Methods in Dynamic" Analysis. Applied Mechanics Reviews, vol.40, n.1, Jan. pp.01-23, 1987.
- Beskos, D.E., "Boundary Element Methods in Dynamic Analysis: Part II (1986-1996)", Applied Mechanics Reviews, Vol. 50, N. 3, p. 149-197, 1997.
- Richart, Jr. F. E., Hall, Jr., Woods, R. D. "Vibrations os Soils and Foundations. Prentice Hall, 1970.
- Domingues, J. "Boundary Elements in Dynamics", Elsevier Appl. Science, London, New York, 1993.
- Sanches, L. C. F., Mesquita, E., Palermo Jr., L. "The dynamic stationary behavior of thin elastic plates by the boundary element method." In Proc. First South-American Congress on Computational Mechanics, III Brazilian Congress on Computational Mechanics, VII Argentine CCM, Santa fê-Parana, Argentina, 2002.
- Sanches, L. C. F., Mesquita Neto, E., Palermo Jr., L. "The Dynamic of Thin-Walled Structures by The Boundary Element Method". In Proc. XXV CILAMCE: 25nd. Iberian Latin-American Congress on Computational Methods In Engineering, Campinas, Brazil, nov. 2004.
- Tanaka, M., Matsumoto, T., Shiozaki, A., "Application of boundary-domain-element method to the free vibration problem of plate structures", Computers & Structures, Vol. 66, N. 6, p. 725-735,1998.